مثال -
إذا كان لدينا فضاء طبولوجي (X, τ) متقطع
عيّن المجموعات الكثيفة في هذا الفضاء؟؟
- يحوي هذا الفضاء مجموعة كثيفة وحيدة هي X فقط
$\bar{X} = X$
بفرض لدينا $A \neq X$ و $A \neq \phi$ عندها تكون مجموعة مغلقة
و $\bar{A} = A$ فهي ليست كثيفة لأن لصاقتها تساوي أو لا تساوي X.

- مثال - الفضاء (X, τ) غير متقطع ، τ طبولوجيا ضعيفة
لنفرض $A \neq \phi$ ومنه $\bar{A} = X$ فهي كثيفة وبالتالي
في هذا الفضاء جميع المجموعات كثيفة ماعدا الـ ϕ لأن $\tau = \{X, \phi\}$
- اللصاقة أصغر مجموعة تحوي نفسها -

فضاء المتممات المنتهية :
لتكن X مجموعة غير منتهية إذا كان A مجموعة جزئية من X
فنقصد بالرمز $|X \setminus A| < \infty$ لـ المتممة المنتهية أي متممة A
مجموعة منتهية نعرف طبولوجيا على الشكل التالي τ أسرة المجموعات
الجزئية من X التي متمماتها منتهية
$\tau = \{U \subseteq X : |X \setminus U| < \infty\} \cup \{\phi\}$ متمماتها منتهية
تدعى طبولوجيا المتممات المنتهية والفضاء الناتج فضاء المتممات المنتهية
لنتأكد أن τ طبولوجيا ؟؟
① شرط الاجتماع لنفرض $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ أسرة من عناصر τ
لنثبت أن الاجتماع من τ $\bigcup_\alpha U_\alpha$ لنأخذ $X \setminus \bigcup_\alpha U_\alpha$
$X \setminus \bigcup_\alpha U_\alpha = \bigcap_\alpha (X \setminus U_\alpha)$ حسب دي مورغان
منتهية
مجموعة منتهية و.هـ.م
$\bigcup_\alpha U_{\alpha \in I} \subset \tau$

(٢) بالنسبة للتقاطع $U_1, U_2, \dots, U_n \in \tau$ لنثبت أن $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$

لنأخذ المتممة $X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ حسب د مورغان

$X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} U_i = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus U_i)$

منتهية

(٣) $X \setminus X = \phi$ منتهية ، $X \setminus \phi = X$ ومنه $\phi, X \in \tau$

ومنه τ طبولوجيا

المجموعات المفتوحة في هذا الفضاء هي أي مجموعة متممتها منتهية بالإضافة إلى ϕ.

بالإضافة إلى أن المجموعات المغلقة هي المجموعات المنتهية بالإضافة لـ X.

- مثال -

لنفرض $X = \mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية

(١) مجموعة مفتوحة : $U_1 = \{3, 4, 5, 6, \dots\}$ مفتوحة

لأن متممتها منتهية $X \setminus U_1 = \{1, 2\}$

وأيضاً: $U_2 = \{1, 2, 3, 17, 18, 19, 20, \dots\}$

متممتها منتهية $X \setminus U_2 = \{4, 5, \dots, 16\}$

(٢) مجموعة غير مفتوحة وغير مغلقة :

الأعداد الفردية $A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ غير منتهية و متممتها غير منتهية

أو ، الزوجية أو مضاعفات عدد

* في هذا الفضاء تتحقق الخاصية التالية :

أي مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين تتقاطعان - مثال -

لنفرض $U, V \in \tau$ مجموعتين مفتوحتين وغير خاليتين لبرهان

لفرض أن $U \cap V = \phi$ هذا يعني متممة أي منهما تحوي الأخرى على سبيل

المثال $X \setminus U \supseteq V$ وهذا غير ممكن لأنه $U \in \tau \Leftarrow$

$X \setminus U$ منتهية في حين أن $V \in \tau$ وهي غير منتهية وهذا

الفرض خاطئ ، ومنه $U \cap V \neq \phi$

وبالتالي أي جوارين لأي نقطتين يتقاطعان في هذا الفضاء $X = \mathbb{N}$

- مثال -

لتكن A مجموعة جزئية من فضاء المتممات المنتهية X أوجد :

A° و $\bar{A}$ و $\acute{A}$ و $Fr(A)$ و $Ext(A)$

نميز حالتين : ① A مجموعة منتهية

$A^\circ = \phi$ لأنها لا تحوي مجموعة مفتوحة (غير منتهية)

$\bar{A} = A$ منتهية ⟸ مغلقة

$Fr(A) = \bar{A} \setminus A^\circ = A$

$Ext = X \setminus A^\circ = X \setminus A$.

$\acute{A} = \phi$ لأنه ⟶ لنأخذ $A = \{1,2,3\}$

لو أخذنا 1 ؟ ---- $U = \{1,4,5,6,\ldots\}$ مفتوحة متممتها منغلقة تحوي الواحد فهي جوار له

ومنه $U \cap A \setminus \{1\} = \phi$ الواحد ليست نقطة تراكم وينطبق على أي عنصر هنا

هام — حالة ② A مجموعة غير منتهية

هناك احتمالان بالنسبة لـ A° : $A^\circ =$

الأول أن متممة A منتهية $X \setminus A$ عندها A مفتوحة حسب تعريف وبالتالي $A^\circ = A$

والثاني أن متممة A غير منتهية $X \setminus A$ عندها $A^\circ = \phi$

$\bar{A} = X$ ⟵ في هذا الفضاء أي مجموعة غير منتهية تكون كثيفة لأنه نفرض U جوار كيفي لـ x ومنه $U \cap A \neq \phi$ ومنه x لاصقة لأنه لو كان $U \cap A = \phi$ ⟸ $X \setminus U \supset A$ وهذا مستحيل لأن $X \setminus U$ منتهية و A غير منتهية

$Fr = \bar{A} \setminus A^\circ =$

$Ext = X \setminus \bar{A} =$

$\acute{A} = X$

الخارجية = سمية اللصاقة

برهن: $Ext(A\cup B) = Ext\,A \cap Ext\,B$

$X\setminus \overline{A\cup B} = X\setminus (\bar{A}\cup\bar{B})$

حسب مورغان $X\setminus \overline{A\cup B} = (X\setminus\bar{A})\cap(X\setminus\bar{B})$

- التطبيقات المستمرة -

تعريف: ليكن f معرف $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ و $x_0\in X$ نقطة من المنطلق نقول عن التطبيق f أنه مستمر في النقطة x_0 اذا كان من أجل أي جوار V لـ نقطة $f(x_0)$ في Y يوجد جوار U لـ نقطة x_0 في X بحيث $f(U)\subseteq V$

- برهنة -

يكون التطبيق $f: X\to Y$ من الفضاء الطبولوجي X إلى الفضاء الطبولوجي Y مستمر في نقطة x_0 من X إذا وفقط إذا كانت الصورة العكسية لأي جوار لـ نقطة $f(x_0)$ في Y هي جوار لـ نقطة x_0 في X

شرط اللازم والكافي ليكن f تطبيق مستمر.

البرهان:

نفرض f مستمرة في x_0 عندئذ حسب التعريف من أجل أي جوار V لـ $f(x_0)$ يوجد جوار U لنقطة x_0 بحيث $f(U)\subseteq V$

ومن هنا نجد أنه: $U\subseteq f^{-1}(f(U))\subseteq f^{-1}(V)$

U فرضاً جوار وهو ما يحوي الجوار جوار لـ x_0 ومنه $f^{-1}(V)$ جوار لـ x_0

وبالعكس لنفرض الشرط محقق عندها من أجل أي جوار V لـ $f(x_0)$ يوجد جوار U لـ x_0 بحيث $U=f^{-1}(V)$ بحيث

$f(U)=f(f^{-1}(V))\subseteq V$ ومنه التطبيق مستمر في نقطة x_0

* حتى يكون $f^{-1}(V)$ مستمر يجب أن يكون تقابل (متباين - غامر)

$f^{-1}(V) = \{x\in X : f(x)\in V\}$

مثال: اذا كان لدينا $y=\sin x$

$f^{-1}(0) = k\pi \quad ; k=\pm1, 0, \pm2, \ldots$

$y=f(x)=x^2$

$f^{-1}(1)=\mp 1 \quad , \quad f^{-1}(4)=\pm 2$